RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.9

Trojný integrál na intervale

Nájdite trojné integrály funkcie $f(x, y, z)$ na intervale $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, f\rangle$, t.j. vypočítajte $\iiint_I f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. [1]

1. $f(x, y, z) = x + y + z$, $I = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle \times \langle 0, 1\rangle$
2. $f(x, y, z) = xy \sin z$, $I = \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle$
3. $f(x, y, z) = xyz$, $I = \langle -1, 3\rangle \times \langle 0, 2\rangle \times \langle -2, 6\rangle$
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$

Jakobián

Vypočítajte Jacobiho determinant [2] (tzv. *Jakobián*) polárnej, cylindrickej a sférickej transformácie.

5. Polárna transformácia:
   $x = \rho \cos \varphi$
   $y = \rho \sin \varphi$
6. Cylindrická transformácia:
   $x = \rho \cos \varphi$
   $y = \rho \sin \varphi$
   $z = h$
7. Sférická transformácia:
   $x = \rho \cos \varphi \cos \vartheta$
   $y = \rho \sin \varphi \cos \vartheta$
   $z = \rho \sin \vartheta$

---

[1] Pri výpočte trojného integrálu **na intervale** platia rovnaké zásady ako pri výpočte dvojného integrálu. T.j. ak je funkcia $f(x, y, z)$ ohraničená a spojitá, potom nezáleží na poradí integrácie a platí $\iiint_I f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_e^f \left(\int_c^d \int_a^b f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \int_c^d \left(\int_e^f \int_a^b f\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_e^f \int_c^d f\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x$.
Tak napríklad $\int_2^3 \int_1^2 \int_0^1 xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^2 \int_0^1 xy\frac{1}{2}\left[z^2\right]_2^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\int_0^1 x\frac{1}{2}\left[y^2\right]_1^2\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 = \frac{15}{8}$.

[2] Jakobián vo dvojnom integrále pri substitučných rovniciach $x = \varphi(u, v)$ a $y = \psi(u, v)$ vypočítame takto: $J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$.
Jakobián v trojnom integrále pri substitučných rovniciach $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$ a $z = \chi(u, v, w)$ vypočítame takto: $J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Substitúcia v dvojných integráloch

Použitím vhodnej substitúcie vypočítajte dvojné integrály[3] na oblasti Ω[4].

8. $\displaystyle\iint_\Omega \left(25 - x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 25\}$[5]
9. $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{4 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 4\}$[6]
10. $\displaystyle\iint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\}$[7]
11. $\displaystyle\iint_\Omega \sin\left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $\Omega = \left\{(x,y); \frac{\pi^2}{4} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2, y \geq x, y \geq -x\right\}$[8]

[3]Pri substitučných rovniciach $x = \varphi(u,v)$ a $y = \psi(u,v)$, ktorých Jakobián je $J(u,v)$ platí: $\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Povšimnite si, že ak má oblasť Ω rotačnú symetriu, potom sa transformáciou do polárnych súradníc transformuje oblasť Ω na interval I.

[4]Vo všetkých príkladoch je vhodnou substitúciou transformácia do polárnych súradníc.

[5]Oblasť Ω je množina bodov, ležiacich v kruhu so stredom v bode $S = [0,0]$ a polomerom $r = 5$.

[6]Oblasť Ω je množina bodov, ležiacich v kruhu so stredom v bode $S = [0,0]$ a polomerom $r = 2$.

[7]Oblasť Ω je množina bodov, ležiacich v kruhu so stredom v bode $S = [0,0]$ a polomerom $r = 1$.

[8]Oblasť Ω je množina bodov, ležiacich v časti medzikružia, ktoré vymedzujú koncentrické kružnice so stredom v bode $S = [0,0]$ a polomermi $r_1 = \frac{\pi}{2}, r_2 = \pi$. Okrem toho je priamkami $y = x$ a $y = -x$ medzikružie rozdelené na štvrtiny a nášho príkladu sa týka štvrtina v okolí kladného smeru osi y.